

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Донской государственный технический университет»

Утверждено на заседании
кафедры
технической механики
06.03.2021 г.

Методические указания
Задания и пример выполнения расчетно-
графической работы № 2 по дисциплине
«Строительная механика» для
подготовки бакалавров заочной формы
обучения направления
08.03.01 "Строительство»
b080301AD3AD_130AD_3-21

Ростов-на-
Дону 2021

УДК 624.04

Методические указания для выполнения расчетно-графической работы №2 по дисциплине «Строительная механика» для подготовки бакалавров заочной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство». – Ростов н/Д: ДГТУ, 2021. – 31с.

Изложен материал по решению задач строительной механики с примерами. Приведены варианты контрольных заданий.

b080301ADЗAD_130AD_3-21

УДК 624.04

Составители:

д.т.н., проф. Л.Н.Панасюк

канд. техн. наук, доц. Г.М. Кравченко,

канд. техн. наук, доц. Е.В. Труфанова

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Студенты заочного факультета выполняют расчетно-графическое задание по курсу строительной механики в соответствии с шифром. Шифр определяется по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Например, номер зачетки 12345678. Шифр: 678. Тогда первая цифра шифра 6, вторая 7, третья 8.

Расчетно-графическая работа выполняется в тетрадях или в отчетах формата А4. На титульном листе размещается информация о студенте, выполняющем работу. Чертежи схем, эпюры выполняются карандашом с примерным соблюдением масштаба. На чертежах должны быть показаны основные размеры, на эпюрах должны быть поставлены характерные ординаты, показаны знаки.

Задача № 1

Расчет неразрезной балки

Задание: для заданной балки с выбранной по шифру из табл. 1 и рис. 1 схемой, её размерами и нагрузкой требуется построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от действия постоянной нагрузки (используя уравнения трех моментов).

Методические указания

Решение задачи можно условно разбить на этапы.

1. Вычисляется количество лишних связей по формуле $L = 3K - \Pi$.

2. Выбирается основная система метода сил (ОСМС), которая получается путем врезания шарниров в опорных сечениях. Действие отброшенных жестких связей заменяется парой положительных моментов, изгибающих балку выпуклостью вниз. Действие отброшенных консолей заменяется моментами, значение и знак которых определяются из рассмотрения равновесия консольных частей. Заделки заменяются эквивалентными стержневыми опорами.

3. Затем для выбранной ОСМС формируется система канонических уравнений. Каждое уравнение представляет собой уравнение трех моментов:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n l_n + l_{n+1} + M_{n+1}l_{n+1} = -6EJ\Delta_{np}. \quad (1)$$

Число уравнений трех моментов равно числу промежуточных опор основной системы.

4. Для определения правой части каждого уравнения строятся единичная эпюра и эпюра изгибающих моментов M_p в основной системе от заданной нагрузки.

5. Правая часть уравнения трех моментов равна $-6EJ\Delta_{np}$, где Δ_{np} - взаимный угол поворота на n -й опоре от нагрузки в основной системе.

Величина Δ_{np} может быть вычислена по формуле Мора

$$\Delta_{np} = \sum \frac{M_n M_p}{EJ} dx \quad (2)$$

с использованием способа Верещагина для решения интеграла.

6. После решения системы уравнений, полученные значения неизвестных надо обязательно подставить во все уравнения и проверить правильность её решения.

7. Далее строится линия опорных моментов $M_{оп}$, на которой откладываются значения моментов, участвовавших в системе уравнений.

8. Окончательная эпюра M строится сложением эпюры $M_{оп}$ построенной от опорных моментов и эпюры M_p .

9. Кинематическая проверка осуществляется путем перемножения окончательной эпюры M на «единичные эпюры» M_n по формуле Мора с использованием способа Верещагина.

10. Эпюра поперечных сил строится по эпюре изгибающих моментов так же, как в задаче 4 [8].

11. По эпюре «Q» вычисляются значения реакций в опорах. Общая статическая проверка выполняется путем рассмотрения равновесия заданной балки при действующей на неё нагрузке с учетом опорных реакций.

Таблица 1

№ п/п	Цифры шифра									
	1-я цифра			2-я цифра				3-я цифра		
	L_1 , м	q_1 , кН/м	b , м	P_1 , кН	c , м	L_2 , м	q_2 , кН/м	№ схемы по рис. 1	L_3 , м	P_2 , кН
0	6,0	1,0	1,5	6	2,0	4,0	1,1	0	12,0	3,0
1	8,0	2,0	2,5	5	3,0	5,0	2,1	1	6,0	2,5
2	7,0	3,0	3,5	4	1,0	6,0	3,1	2	5,0	2,0
3	9,0	1,2	2,0	3	1,2	7,0	1,3	3	7,0	6,0
4	10,0	2,2	3,0	9	2,3	8,0	2,2	4	8,0	4,0
5	11,0	3,2	1,8	1	3,4	9,0	3,2	5	9,0	7,0
6	5,0	1,5	1,2	2	1,5	10,0	1,6	6	10,0	1,0
7	12,0	2,5	3,2	8	2,5	11,0	2,5	7	9,5	4,5
8	13,0	3,5	1,9	3	3,5	12,0	3,0	8	8,5	1,5
9	6,5	4,0	1,5	7	4,0	13,0	2,3	9	6,5	3,5

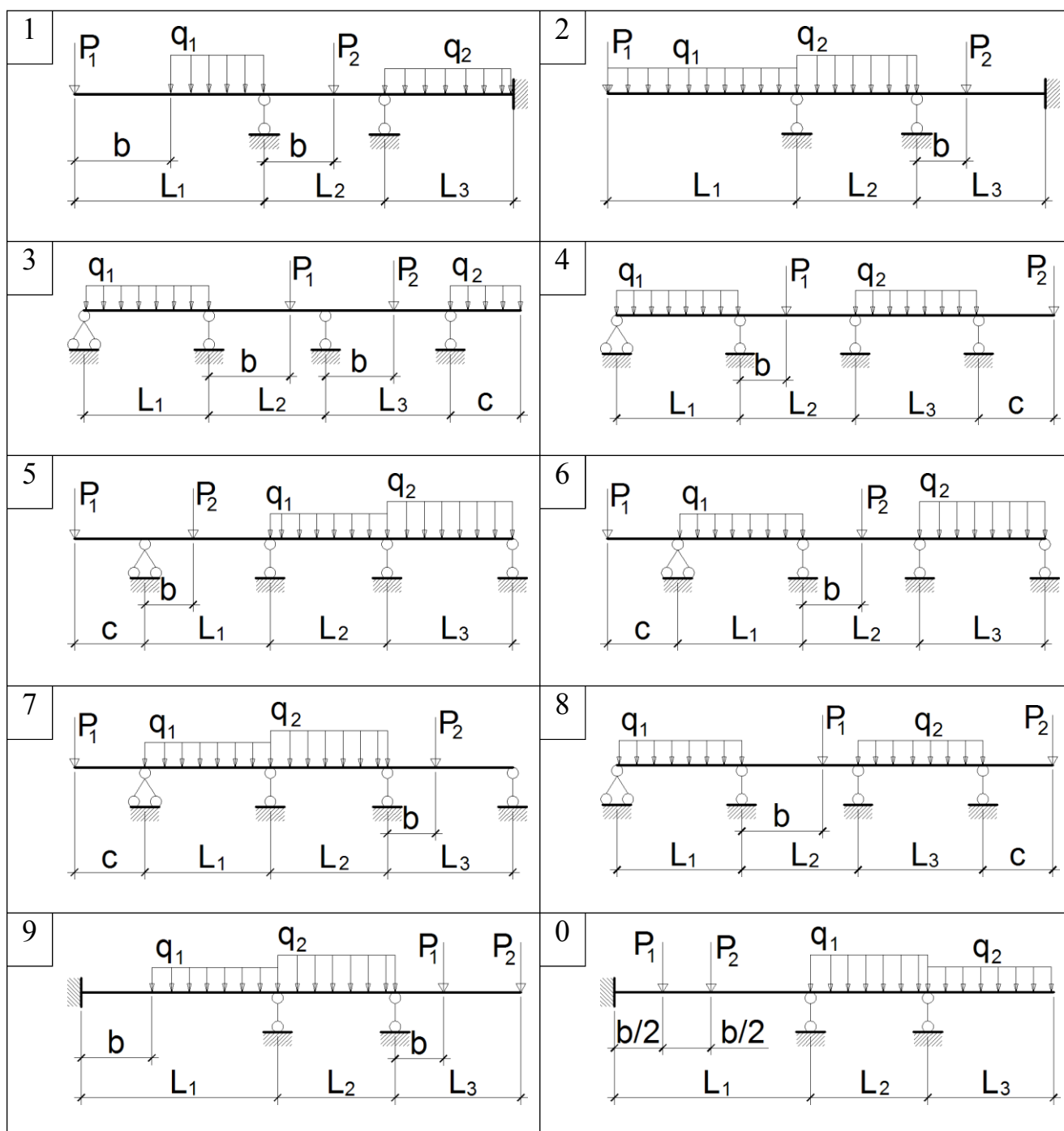


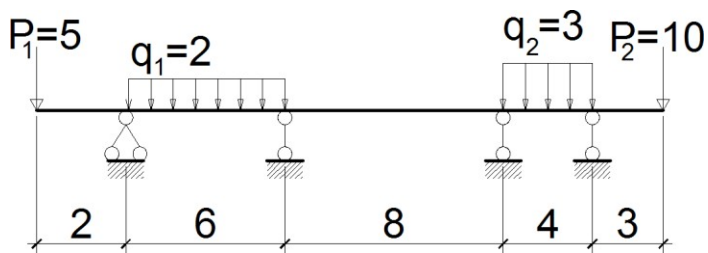
Рис. 1

Пример решения задачи

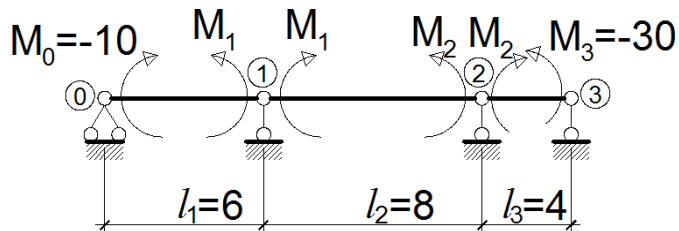
Задача № 1. Расчет неразрезной балки

Дано: $L_1 = 6\text{м}$, $L_2 = 8\text{м}$, $L_3 = 4\text{м}$, $b = 2\text{м}$, $c = 3\text{м}$, $q_1 = 2\text{кН/м}$, $q_2 = 3\text{кН/м}$, $P_1 = 5\text{кН}$, $P_2 = 10\text{кН}$ (рис. 2).

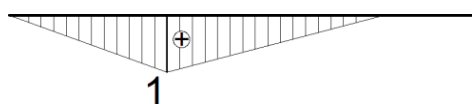
Построить эпюры M , Q и выполнить общую статическую проверку.



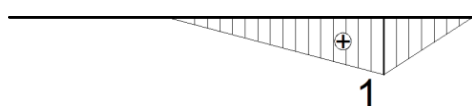
ОСМС



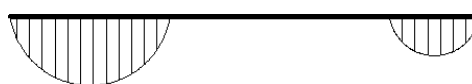
Эпюра « M_1 »



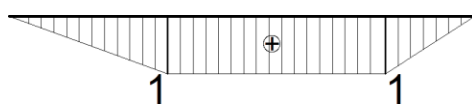
Эпюра « M_2 »



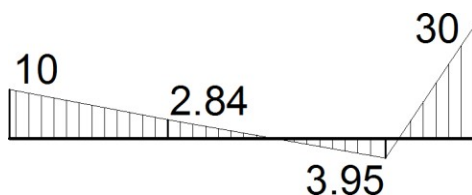
Эпюра « M_P »



Эпюра « M_S »



Эпюра « $M_{оп}$ »



Эпюра « $M_{ок}$ »

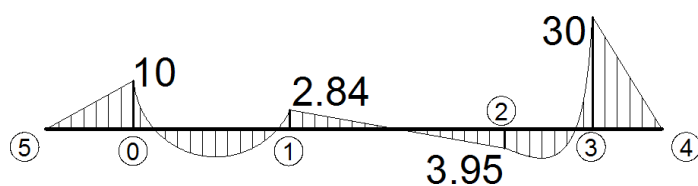


Рис. 2

Решение:

1. Определение числа лишних связей.

$$L = 3 \cdot K - III = 3 \cdot 3 - 7 = 2$$

2. Выбор ОСМС (рис. 2).

3. Формирование системы уравнений трех моментов.

$$\begin{aligned} M_0 \cdot l_1 + 2M_1 l_1 + l_2 + M_2 \cdot l_2 &= -6EI \cdot \Delta_{1P}; \\ M_1 \cdot l_2 + 2M_2 l_2 + l_3 + M_3 \cdot l_3 &= -6EI \cdot \Delta_{2P}; \end{aligned}$$

4. Построение единичных эпюр моментов « M_1 », « M_2 » (рис. 2).

5. Построение грузовой эпюры моментов « M_P » (рис. 2).

6. Вычисление грузовых коэффициентов системы уравнений.

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{M_1 M_P}{EI} dx = \\ &= \frac{1}{EI} \frac{2 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 1 = \frac{18}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= \frac{M_2 M_P}{EI} dx = \\ &= \frac{1}{EI} \frac{3 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 1 = \frac{8}{EI}; \end{aligned}$$

7. Проверка коэффициентов.

$$\begin{aligned} \Delta_{SP} &= \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{1}{EI} 18 + 8 = \\ &= \frac{26}{EI}; \end{aligned}$$

$$M_S = M_1 + M_2;$$

$$\Delta_{SP} = \frac{M_S M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{2 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 1 + \frac{3 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 1 = \frac{26}{EI};$$

8. Решение системы уравнений.

$$\begin{aligned} -10 \cdot 6 + 2 \cdot M_1 \cdot 6 + 8 + M_2 \cdot 8 &= -6EI \cdot \frac{18}{EI}; \\ M_1 \cdot 8 + 2 \cdot M_2 \cdot 8 + 4 + (-30) \cdot 4 &= -6EI \cdot \frac{8}{EI}; \end{aligned}$$

Решаем систему уравнений методом Крамера.

$$28 \cdot M_1 + 8 \cdot M_2 = -48;$$

$$8 \cdot M_1 + 24 \cdot M_2 = 72;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 28 & 8 \\ 8 & 24 \end{vmatrix} = 28 \cdot 24 - 8 \cdot 8 = 608;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -48 & 8 \\ 72 & 24 \end{vmatrix} = -48 \cdot 24 - 72 \cdot 8 = -1728;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 28 & -48 \\ 8 & 72 \end{vmatrix} = 28 \cdot 72 - 8 \cdot (-48) = 2400;$$

$$M_1 = -\frac{1728}{608} = -2.84;$$

$$M_2 = \frac{2400}{608} = 3.95;$$

Проверка:

$$28 \cdot (-2.84) + 8 \cdot 3.95 = -48;$$

$$8 \cdot (-2.84) + 24 \cdot 3.95 = 72;$$

$$-47.92 \approx -48; \quad \varepsilon = \frac{48 - 47.92}{48} 100\% = 0.2\% ;$$

$$72.08 \approx 72; \quad \varepsilon = \frac{72.08 - 72}{72} 100\% = 0.1\% .$$

9. Построение линии опорных моментов «М_{оп}» (рис. 2).

10. Построение окончательной эпюры моментов «М_{ок}» (рис. 2).

$$M_{OK} = M_{OP} + M_P.$$

11. Кинематическая проверка.

$$\Delta = \frac{M_S M_{OK}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{2 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 1 - \frac{1}{2} 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} 1 - \frac{1}{2} 2.84 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} 2.84 \cdot 8 \cdot 1 + \frac{1}{2} 3.95 \cdot 8 \cdot 1 + \frac{3 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2} 3.95 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 1 - \frac{1}{2} 30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} 1 \right] = \\ = \frac{47.07 - 47.04}{EI} = \frac{0.03}{EI}; \quad \varepsilon = \frac{0.03}{47.04} 100\% = 0.06\%.$$

12. Построение эпюры «Q» (рис. 3).

$$Q_{5-0} = \frac{-10 - 0}{2} = -5;$$

$$Q_{0-1}^{\text{лев}} = \frac{2 \cdot 6}{2} + \frac{-2.84 - (-10)}{6} = 7.19; \quad Q_{0-1}^{\text{пр}} = -\frac{2 \cdot 6}{2} + \frac{-2.84 - (-10)}{6} = -4.81;$$

$$Q_{1-2} = \frac{3.95 - (-2.84)}{8} = 0.85;$$

$$Q_{2-3}^{\text{лев}} = \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{-30 - 3.95}{4} = -2.49; \quad Q_{2-3}^{\text{пр}} = -\frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{-30 - 3.95}{4} = -14.49;$$

$$Q_{3-4} = \frac{0 - (-30)}{3} = 10;$$

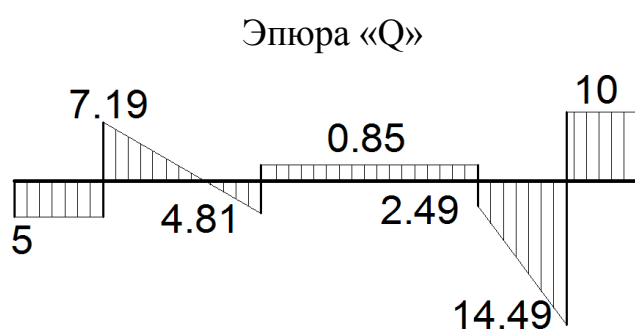


Рис. 3

13. Общая статическая проверка.

$$Y = 0: -5 - 10 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 + 12.19 + 5.66 - 3.34 + 24.49 = 0.$$

Задача №2

Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений

Для заданной статически неопределимой рамы (рис. 4, 5) с размерами и нагрузкой, взятыми из табл. 2, требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

Методические указания

Для определения числа неизвестных по методу перемещений используется формула $n = n_{уг} + n_{лин}$, где $n_{уг}$ число угловых перемещений, равное числу жестких узлов; $n_{лин}$ число линейных перемещений, равное числу степеней свободы шарнирной системы, полученной из заданной путем введения шарниров во все жесткие узлы, включая опорные. При этом используется формула

$$n_{лин} = W = 2U - C - C_{оп}, \quad (3)$$

где W - число степеней свободы;

U - число узлов фермы;

C - число стержней фермы;

$C_{оп}$ - число опорных стержней.

Основная система метода перемещений строится путем введения фиктивных связей, закрепляющих узлы от поворотов и линейных перемещений. Составляется система канонических уравнений метода перемещений:

$$r_{ij}Z_j + R_{ip} = 0. \quad (4)$$

Для определения коэффициентов при неизвестных Z_j и свободных членов R_{ip} строятся эпюры M_i от единичных перемещений (угловых и линейных) и эпюра M_p . Все эпюры строятся по таблицам метода перемещений.

Коэффициенты при неизвестных r_{ij} и свободные члены R_{ip} определяются или из условий равновесия узлов или равновесия части рамы, отсеченной таким образом, чтобы в рассматриваемую часть попала и фиктивная опора (связь).

Правильность найденных значений r_{ik} проверяется путем умножения на себя эпюры M_s ,

где $M_s = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n$

$$r_s = \sum_l \frac{M_s^2 dx}{EJ} = \sum r_{ij} \quad (5)$$

Грузовые реакции проверяются путем умножения «единичных» эпюр на грузовую эпюру M_P^{mc} , построенную для основной системы метода сил

$$R_{ip} = - \sum_l \frac{M_i M_P^{mc}}{EJ} dx. \quad (6)$$

Найденные и проверенные значения r_{ij} и R_{ip} подставляют в канонические уравнения метода перемещений. Правильность решения системы уравнений проверяют путем подстановки найденных значений «Z» во все исходные уравнения.

Окончательная эпюра изгибающих моментов строится путем сложения откорректированных эпюр и грузовой эпюры:

$$M = M_p + M_1 Z_1 + M_2 Z_2 \dots + M_n Z_n. \quad (7)$$

Правильность окончательной эпюры проверяют путем статической и кинематической проверок.

Статическая проверка заключается в проверке равновесия местных узлов или частей рамы.

Для кинематической проверки строится любая основная система метода сил. В основной системе метода сил строятся эпюры $M_1^0, M_2^0, M_3^0 \dots$ от единичных сил $X_1, X_2, X_3 \dots$

Окончательная эпюра умножается по способу Верещагина на «единичные» эпюры. Результат перемножения должен быть равен 0.

Таблица 2

№ п/п	Цифры шифра											
	1-я цифра				2-я цифра						3-я цифра	
	L_1 , м	L_2 , м	h_1 , м	h_2 , м	P_1 , кН	P_2 , кН	M_1 , кНм	M_2 , кНм	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	№ схемы по рис. 4, 5	I_1/I_2
0	5.0	2.0	6.0	4.0	1	-	-	9	1.0	-	0	1/2
1	4.5	2.5	5.0	3.0	-	2	10	-	-	2.0	1	2/1
2	4.0	3.0	4.0	2.0	3	-	-	7	3.0	-	2	1/3
3	3.0	3.5	3.0	5.0	-	4	8	-	-	4.0	3	3/1
4	4.0	4.0	2.0	6.0	5	-	-	5	1.5	-	4	3/2
5	3.5	4.5	6.5	6.5	-	6	6	-	-	2.5	5	2/3
6	2.5	5.0	5.5	4.5	7	-	-	3	3.5	-	6	1/4
7	3.0	5.5	3.5	5.5	-	8	2	-	-	1.8	7	4/1
8	4.0	6.0	4.5	2.5	9	-	-	1	1.2	-	8	3/4
9	2.5	6.5	2.5	3.5	-	10	4	-	-	2.2	9	4/3

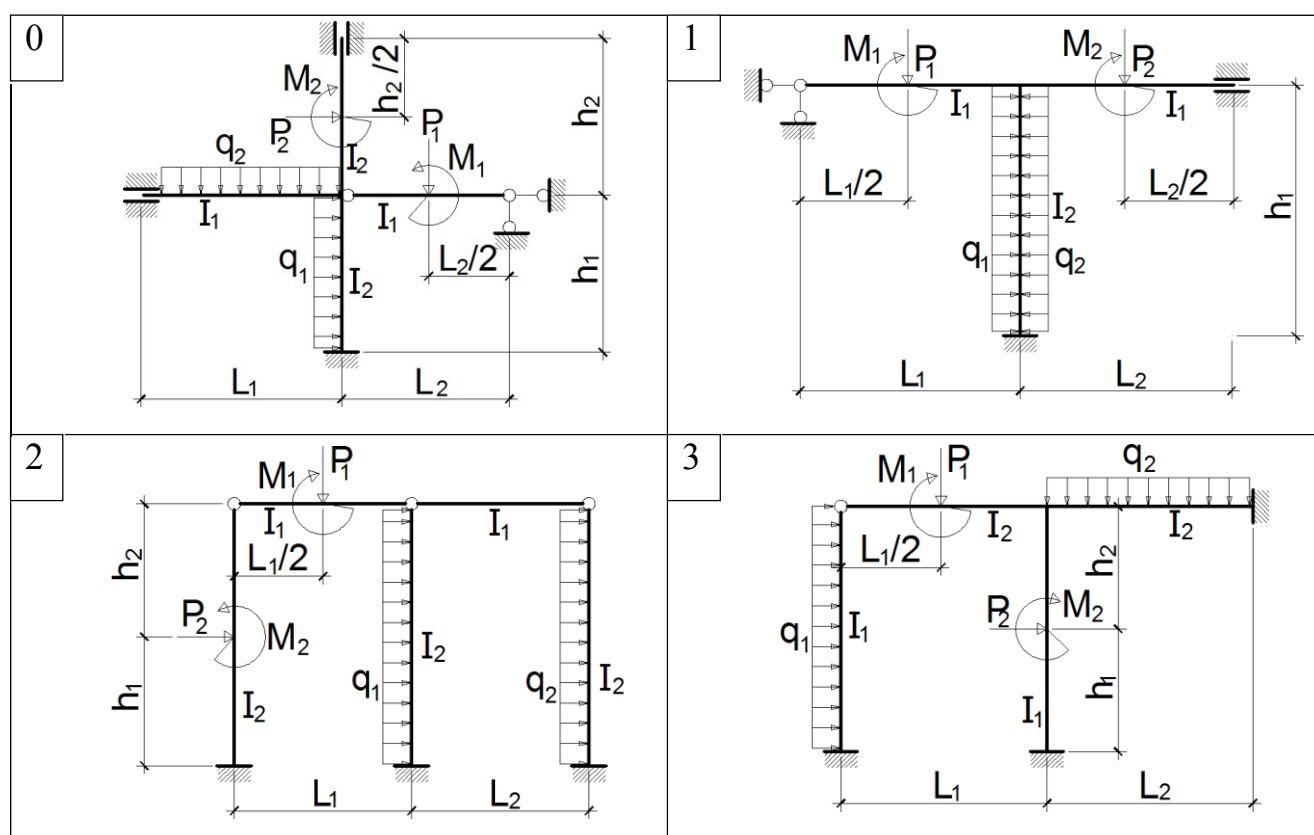


Рис. 4

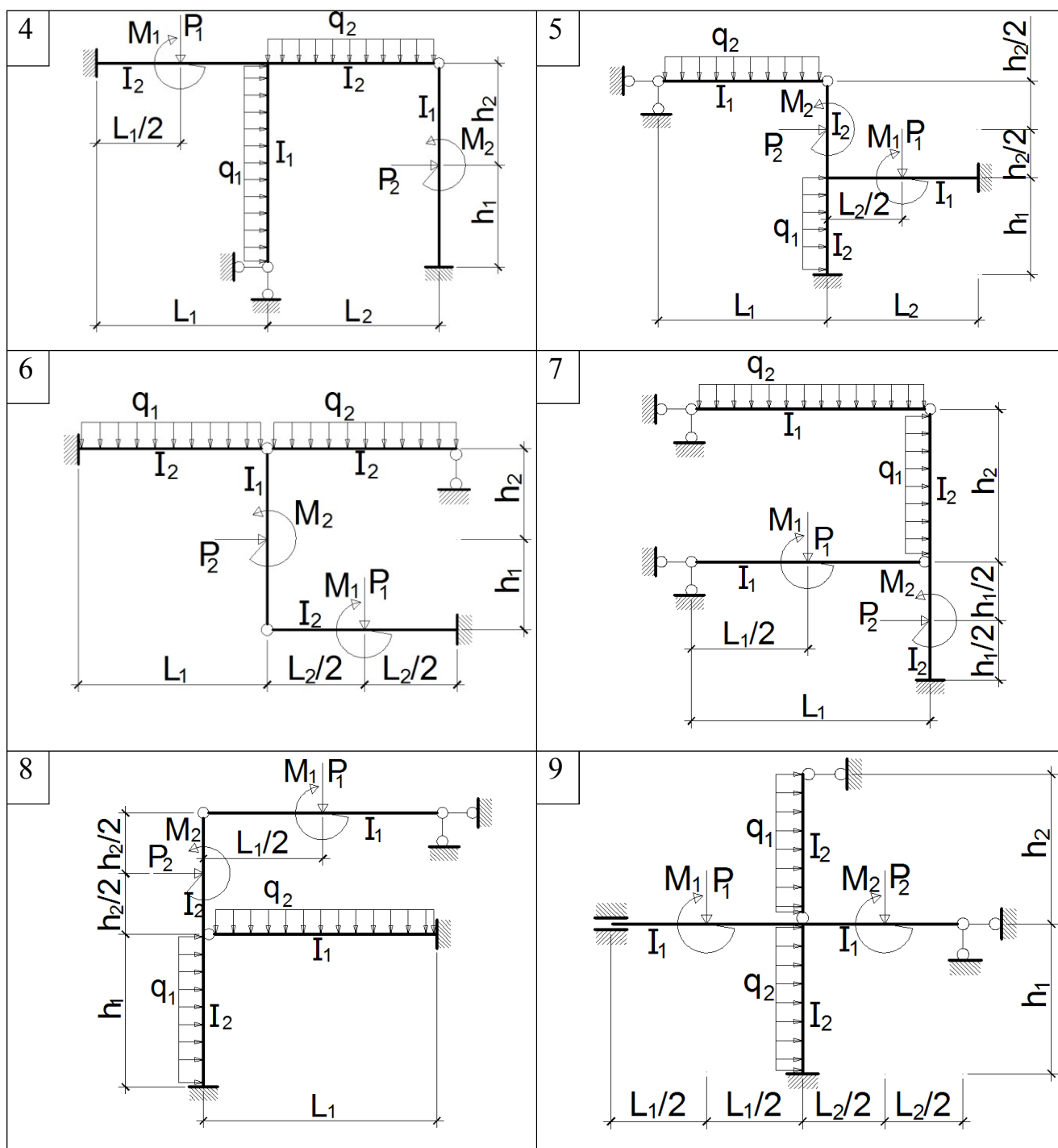


Рис. 5

Пример решения задачи

Задача №6. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений

Дано: $P_1=3\text{кН}$, $M_2=3\text{кНм}$, $q_1=2\text{кН/м}$, $I_1=I$, $I_2=2I$, $h_1=5\text{м}$, $h_2=6\text{м}$, $L_1=8\text{м}$ (рис. 6).

Построить эпюры « M », « Q », « N ».

Решение:

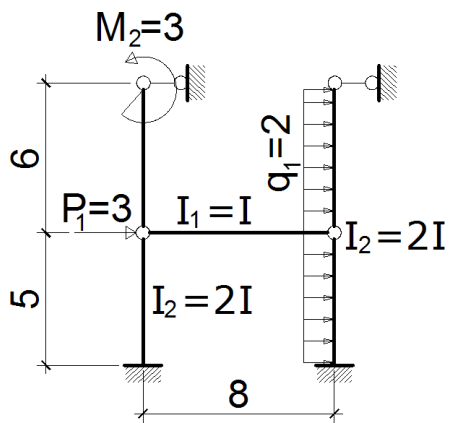
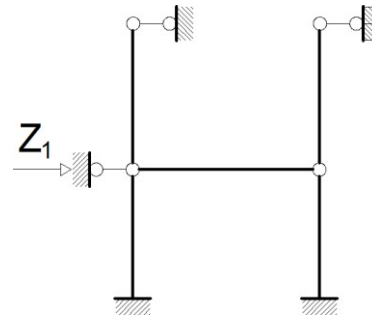


Рис. 6

1. Определение числа неизвестных перемещений.

$$n = n_{\text{уг}} + n_{\text{лин}} = 1 + 1 = 2$$

2. Выбор ОСМП.



3. Формирование канонического уравнения метода перемещений.

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1P} = 0.$$

4. Построение единичной эпюры «M1» (рис. 7).

Эпюра «M1»

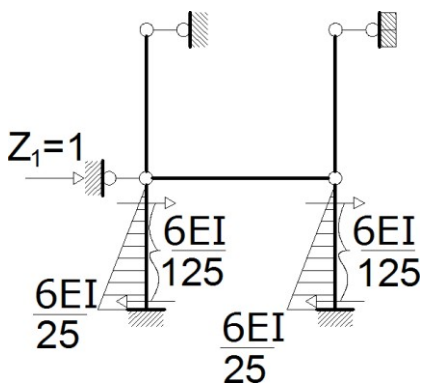


Рис. 7

5. Построение грузовой эпюры «Mr» (рис. 8).

Эпюра «Mr»

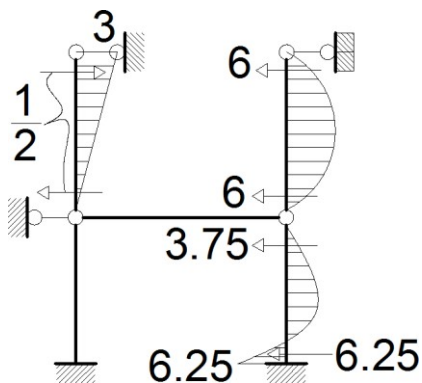


Рис. 8

6. Вычисление коэффициентов канонического уравнения (рис. 9).

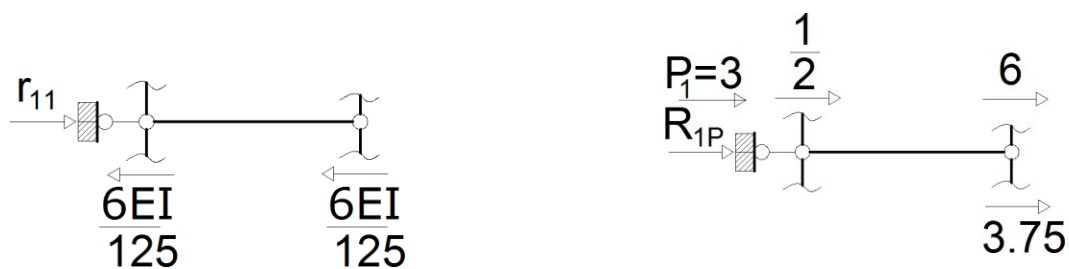


Рис. 9

$$X = 0; \quad r_{11} - \frac{6EI}{125} - \frac{6EI}{125} = 0; \quad r_{11} = \frac{12EI}{125} = 0.096EI;$$

$$X = 0; \quad R_{1P} + 3 + \frac{1}{2} + 6 + 3.75 = 0; \quad R_{1P} = -13.25;$$

7. Проверка коэффициентов канонического уравнения.

$$r_{11} = \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6EI}{25} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6EI}{25} \cdot 2 = 0.096EI;$$

Эпюра « M_P^{MC} »

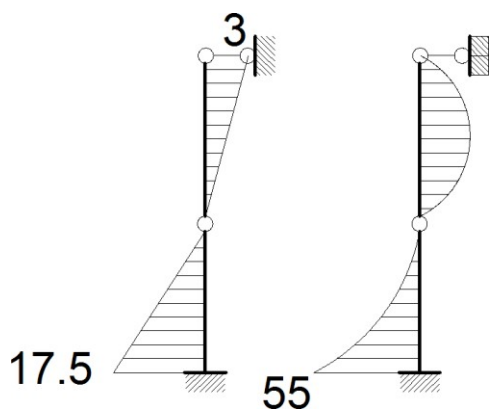


Рис. 10

$$R_{1P} = - \frac{M_P^{MC} M_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 17.5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6EI}{25} + \frac{2 \cdot 5^3}{12} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{6EI}{25} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6EI}{25} = -13.25,$$

где M_P^{MC} – «грузовая» эпюра моментов, построенная в ОСМС (рис. 10).

8. Решение канонического уравнения.

$$0.096EI \cdot Z_1 - 13.25 = 0;$$

$$Z_1 = \frac{138.021}{EI};$$

9. Корректировка единичной эпюры (рис. 11).

Эпюра « $M_1 Z_1$ »

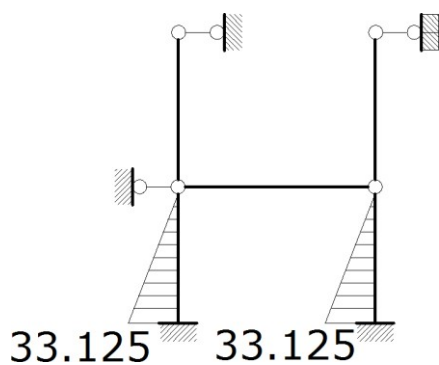


Рис. 11

10. Построение окончательной эпюры моментов (рис. 12).

Эпюра « M_{OK} »

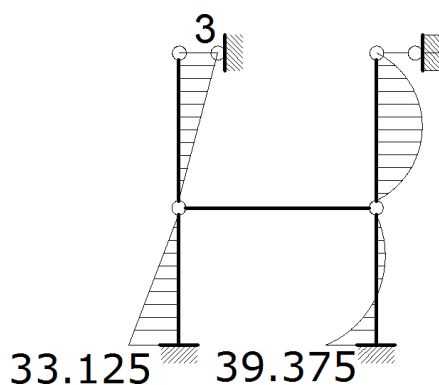


Рис. 12

11. Кинематическая проверка.

$$\Delta = \frac{M_{OK} M_1^{MC}}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} 33.125 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} 5 + \frac{2 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 5 - \frac{1}{2} 39.375 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} 5 \right] =$$

$$= \frac{328.125 - 328.125}{EI} = 0;$$

где M_1^{MC} – «единичная» эпюра, построенная в ОСМС (рис. 13).

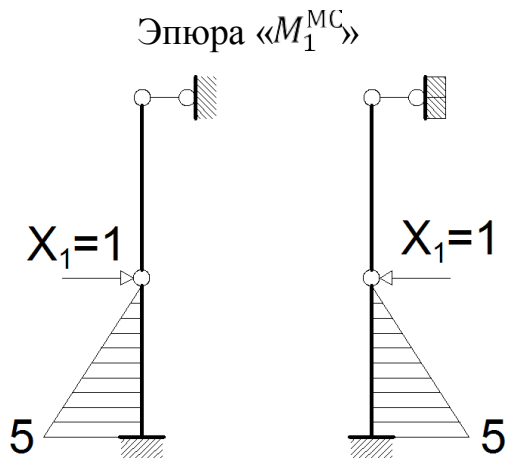


Рис. 13

12. Построение эпюры поперечных сил «Q» (рис. 14).

$$Q_1 = \frac{0 - -33.125}{5} = 6.625;$$

$$Q_2 = \frac{3 - 0}{6} = 0.5;$$

$$Q_3^{\text{ЛЕВ}} = \frac{2 \cdot 5}{2} + \frac{0 - -39.375}{5} = 12.875;$$

$$Q_3^{\text{ПР}} = -\frac{2 \cdot 5}{2} + \frac{0 - -39.375}{5} = 2.875;$$

$$Q_4^{\text{ЛЕВ}} = \frac{2 \cdot 6}{2} + \frac{0 - 0}{6} = 6;$$

$$Q_4^{\text{ПР}} = -\frac{2 \cdot 6}{2} + \frac{0 - 0}{6} = -6;$$

Эпюра «Q»

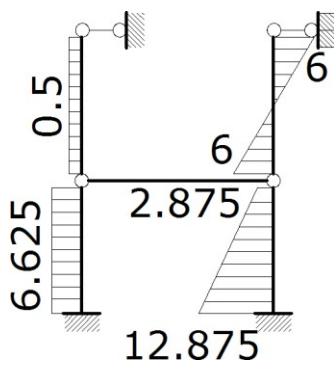
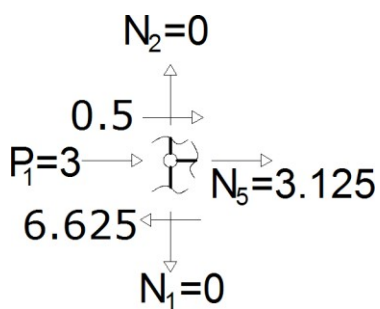


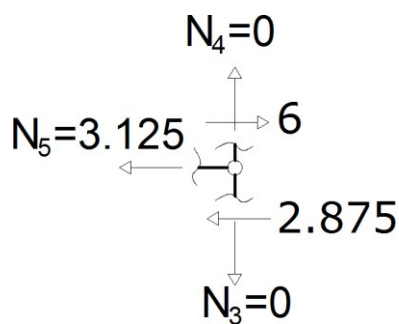
Рис. 14

13. Построение эпюры продольных сил «N» (рис. 15).



$$X = 0; 3 + 0.5 - 6.625 + N_5 = 0;$$

$$N_5 = 3.125;$$



$$X = 0; 6 - 2.875 - N_5 = 0;$$

$$N_5 = 3.125;$$

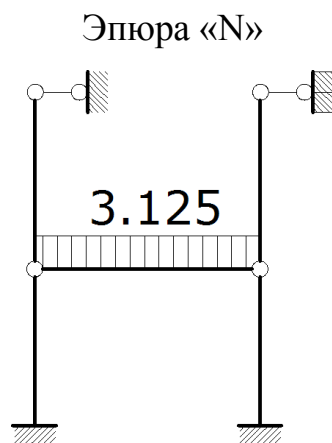
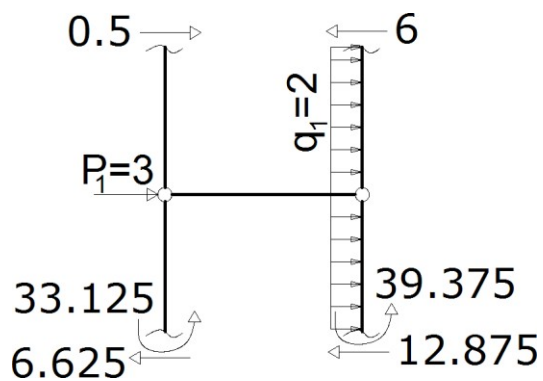


Рис. 15

14. Общая статическая проверка (рис. 16).



$$Y = 0;$$

$$X = 0; -6.625 - 12.875 + 3 + 0.5 -$$

$$-6 + 2 \cdot 11 = 0;$$

Рис. 16

Задача №3

Расчет плоской рамы на устойчивость

Задание: для статически неопределимой рамы (рис.17, 18) с выбранными по шифру из табл. 3 размерами и нагрузкой требуется определить значения критических сил, используя метод перемещений.

Таблица 3

№ п/п	1-я цифра		2-я цифра		3-я цифра		
	L_1 , м	h_1 , м	P_1/P_2	L_2 , м	№ схемы по рис. 17, 18	h_2 , м	I_1/I_2
0	6.0	4.0	1,1	11	0	0	0,9
1	5.5	5.0	1,2	12	1	2	0,8
2	4.0	6.0	1,3	13	2	0	0,7
3	2.5	11.0	1,4	14	3	4	0,6
4	7.0	12.0	1,5	5	4	5	0,5
5	4.5	7.0	1,6	6	5	0	1,2
6	3.5	8.0	1,7	7	6	3	1,4
7	3.0	10.0	1,8	8	7	6	1,5
8	4.0	9.0	1,9	9	8	0	1,6
9	6.5	10.5	2,0	10	9	0	1,8

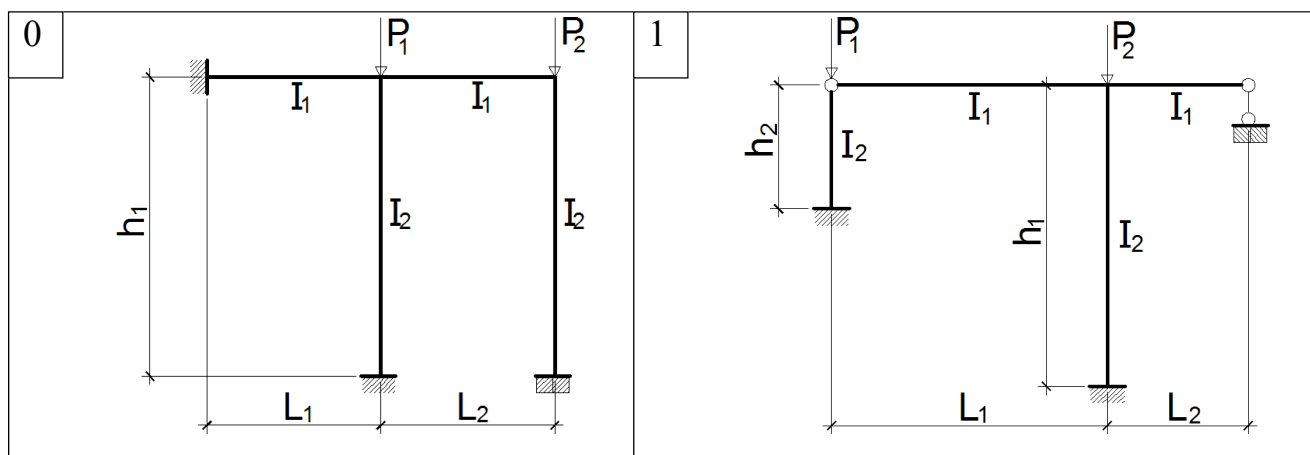


Рис. 17

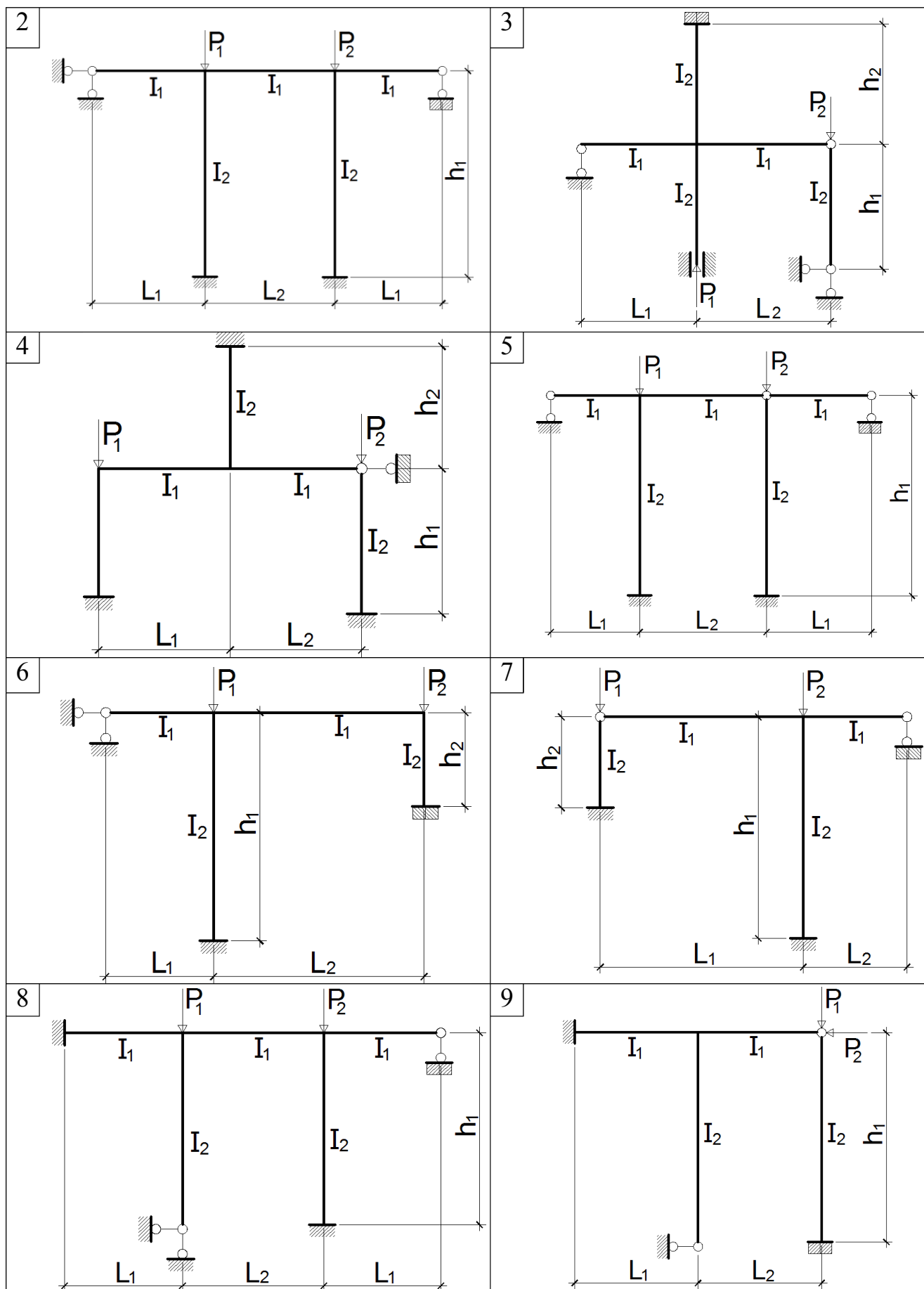


Рис. 18

Методические указания

Порядок расчета рам методом перемещений на устойчивость несколько отличается от аналогичного расчета на прочность.

При действии внешних нагрузок вдоль стержней «грузовые» эпюры в основной системе метода перемещений отсутствуют, а свободные члены канонических уравнений обращаются в нули. И система уравнений в рамах с двумя неизвестными принимает вид:

$$\begin{aligned} r_{11} z_1 + r_{12} z_2 &= 0; \\ r_{21} z_1 + r_{22} z_2 &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

При потере устойчивости перемещения $z_1 \neq 0$ и $z_2 \neq 0$, нетривиальному решению системы уравнений соответствует равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11} * r_{22} - r_{12}^2 = 0 \quad (9)$$

«Единичные» реакции связей (элементы определителя) r_{ij} определяются статическим методом, для чего строятся единичные эпюры моментов.

Построение единичных эпюр моментов для нагруженных сжимающими силами стержней выполняется с помощью специальных таблиц значений функций Жуковского для расчета рам на устойчивость. Они имеются на кафедре технической механики.

Построение эпюр для ненагруженных сжимающими силами элементов выполняется по обычным таблицам метода перемещений.

Элементы определителя r_{ij} включают в себя некоторые функции $\varphi_n(u_i)$ и $\varphi_m(u_k)$ от параметров

$$u_i = \frac{\overline{P_i}}{EJ_i} h_i; \quad u_k = \frac{\overline{P_k}}{EJ_k} h_k, \quad (10)$$

где P_i и P_k – силы, действующие вдоль стоек h_i и h_k ;

EJ_i и EJ_k – жесткости стоек.

По заданию силы P_i и P_k связаны между собой коэффициентом α , поэтому и параметры u_i и u_k окажутся связанными соотношением

$$\frac{u_i}{u_k} = h_i \frac{P_i}{EJ_i} : h_k \frac{P_k}{EJ_k} = \frac{h_i}{h_k} \alpha \frac{EJ_k}{EJ_i}. \quad (11)$$

Уравнение (7) решается относительно u подбором, для чего вначале задаются наименьшим, отличным от нуля, значением параметра u_1 . Затем из таблиц выписываются значения функции $\varphi_n(u_i)$ и $\varphi_m(u_k)$, входящие в уравнение устойчивости. Если данные значения φ не удовлетворяют уравнению, то нужно задаться другим значением u_s и проделать эти вычисления вторично и т.д. Когда будут найдены величины u_i и u_k , удовлетворяющие уравнению устойчивости, то по формулам

$$P_{i \text{ кр}} = \frac{u_i^2 EJ_i}{h_i^2} \quad \text{и} \quad P_{k \text{ кр}} = \frac{u_k^2 EJ_k}{h_k^2} \quad (12)$$

определяются значения критических сил.

Подобрать значение u можно, построив график зависимости величины определителя D от значения параметра $u = D(u)$ (рис.19).

Абсцисса точки пересечения графика $D(u)$ с осью u является приближенной величиной критического параметра, которую можно уточнить последующим подбором. Величина критического параметра проверяется по формуле Эйлера.

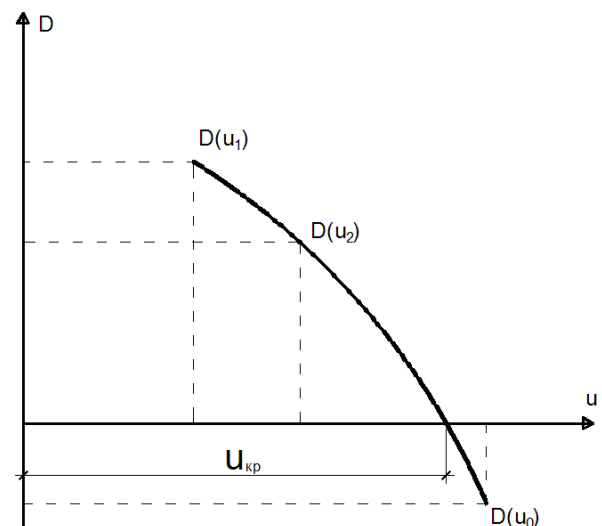


Рис. 19

Пример решения задачи

Задача №3. Расчет плоской рамы на устойчивость. Дано: $P_1 =$

$2P$, $P_2 = P$, $L_1 = 6\text{м}$, $L_2 = 4\text{м}$, $I_1 = I$,

$I_2 = 2I$, $h_1 = 8\text{м}$ (рис. 20).

Определить: $P_{\text{кр}} - ?$

Решение:

1. Определение числа неизвестных метода перемещений.

$$n = n_{\text{уг}} + n_{\text{лин}} = 2 + 0 = 2$$

2. Выбор ОСМП (рис. 21).

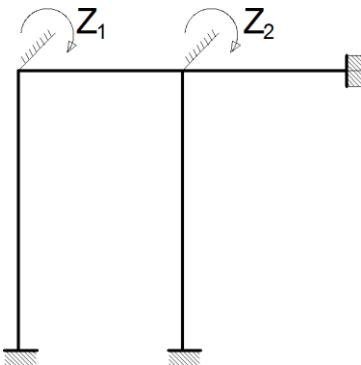


Рис. 21

3. Формирование уравнения устойчивости.

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11} * r_{22} - r_{12}^2 =$$

4. Нумерация сжатых стержней и вычисление параметров устойчивости.

$$u_1 = 6 \frac{P}{EI}; \quad u_2 = 4 \frac{3P}{EI} = 6.93 \frac{P}{EI};$$

$$u = \max u_1; u_2 = 6.93 \frac{P}{EI};$$

$$u_1 = 0.87u; \quad u_2 = 1u.$$

5. Построение единичных эпюр (рис. 22).

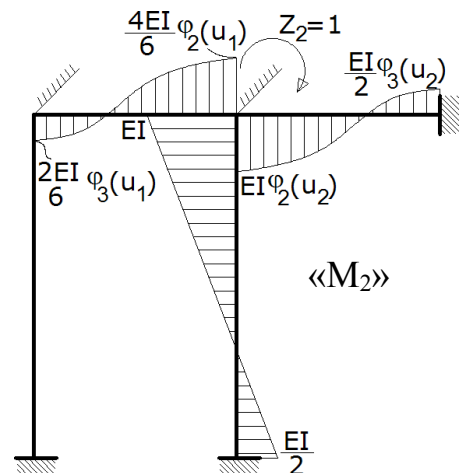
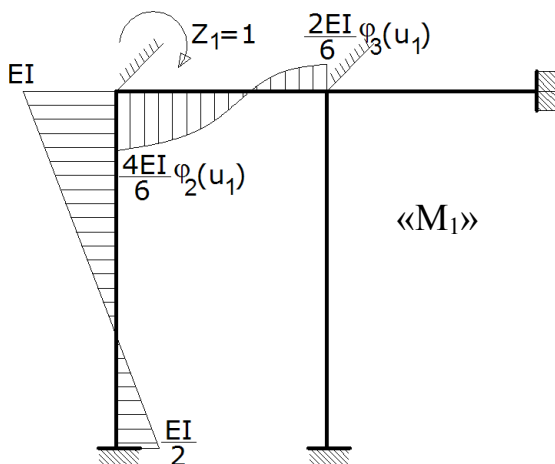


Рис. 22

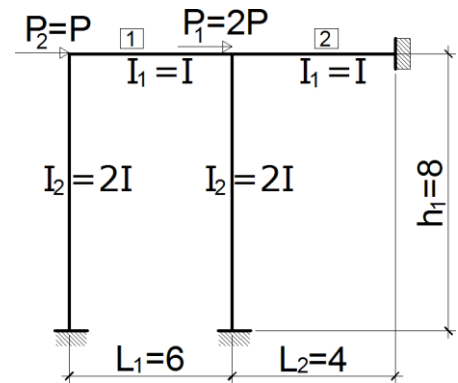
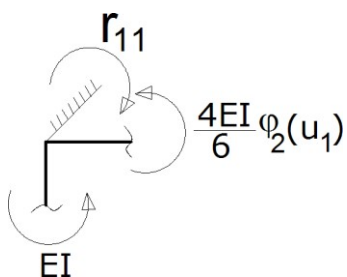


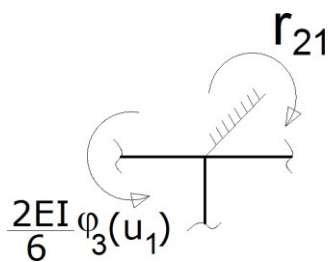
Рис. 20

6. Вычисление единичных реакций.



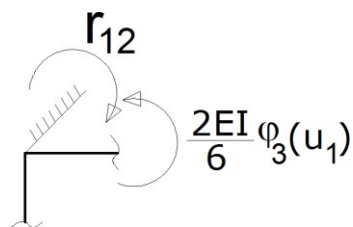
$$m = 0; \quad r_{11} = \frac{2}{3}EI\varphi_2 u_1 + EI;$$

$$r_{11} = \frac{2}{3}EI\varphi_2 0.87u + EI;$$



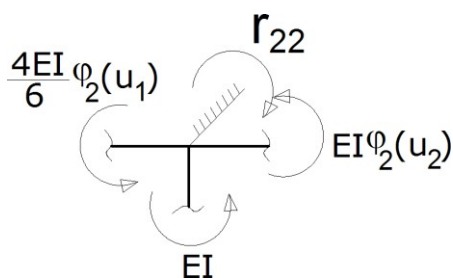
$$m = 0; \quad r_{21} = \frac{2}{6}EI\varphi_3 u_1 ;$$

$$r_{21} = \frac{1}{3}EI\varphi_3 0.87u ;$$



$$m = 0; \quad r_{12} = \frac{2}{6}EI\varphi_3 u_1 ;$$

$$r_{12} = \frac{1}{3}EI\varphi_3 0.87u ;$$



$$m = 0; \quad r_{22} = \frac{4}{6}EI\varphi_2 u_1 + EI + EI\varphi_2 u ;$$

$$r_{22} = \frac{2}{3}EI\varphi_2 0.87u + EI + EI\varphi_2 u ;$$

7. Решение уравнения устойчивости.

$$\frac{2}{3}EI\varphi_2 0.87u + EI - \frac{2}{3}EI\varphi_2 0.87u + EI + EI\varphi_2 u - \frac{1}{3}EI\varphi_3 0.87u^2 = 0;$$

$$\frac{2}{3}\varphi_2 0.87u + 1 - \frac{2}{3}\varphi_2 0.87u + 1 + \varphi_2 u - \frac{1}{3}\varphi_3 0.87u^2 = 0;$$

u	$0.87u$	$\varphi_2 0.87u$	$\varphi_2 u$	$\varphi_3 0.87u$	r_{11}	r_{22}	r_{12}	D
3.00	2.61	0.7492	0.6560	1.1431	1.50	2.16	0.38	3.087
4.50	3.92	0.3338	-0.0048	1.4647	1.22	1.22	0.49	1.250
5.00	4.35	0.0974	-0.4772	1.6963	1.06	0.59	0.57	0.306
5.20	4.52	-0.0224	-0.7629	1.8267	0.99	0.22	0.61	-0.152
5.14	4.47	0.0155	-0.6683	1.7846	1.01	0.34	0.59	-0.008

$$u = 5.14$$

8. Определение критической силы.

$$P_{\text{кр}} = \frac{u^2 EJ}{l^2} = \frac{5.14^2 EJ}{4^2} = 1.651 EJ;$$

$$\mu = \frac{\pi}{u} = \frac{3.14}{5.14} = 0.61;$$

Задача №4

Динамический расчет плоской рамы

Задание: для плоской рамы с выбранными по шифру из табл. 4 размерами, соотношениями жесткостей элементов и сосредоточенных масс требуется определить значение наименьшей собственной частоты свободных колебаний рамы (рис. 23, 24).

Методические указания

Решению задачи должно предшествовать изучение второго раздела третьей части курса. Для решения задачи по определению частот свободных колебаний рамы необходимо:

1. Определить число степеней динамических свобод;
2. Составить вековое уравнение.

Вековое уравнение для системы уравнения с двумя степенями свободы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}^* m_1 - \lambda & \delta_{12}^* m_2 \\ \delta_{21}^* m_1 & \delta_{22}^* m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

3. Определить «единичные» перемещения δ_{ik} , входящие в вековое уравнение (13) по формуле Мора

$$\begin{aligned} \delta_{11}^* &= \sum \frac{M^I M^I dx}{EJ}; \\ \delta_{12}^* &= \sum \frac{M^I M^{II} dx}{EJ}; \\ \delta_{22}^* &= \sum \frac{M^{II} M^{II} dx}{EJ}; \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь M^I и M^{II} - изгибающие моменты в заданной системе от действия единичных сосредоточенных сил $P_1=1$, $P_2=1$, приложенных вместо масс в направлении возможного перемещения этих масс при колебании.

4. Определить собственные числа λ векового уравнения и найти наименьшую частоту свободных колебаний рамы ω по формуле:

$$\omega = \sqrt{(1/\lambda)} \quad (15)$$

Таблица 4

№ п/п	Цифра шифра			
	1-я цифра	2-я цифра		3-я цифра
	L, м	h, м	I ₁ /I ₂	номер схемы по рис. 23, 24
0	6.0	6.0	1/2	0
1	5.5	5.0	2/1	1
2	4.0	7.0	1/3	2
3	5.0	8.0	3/1	3
4	2.0	4.0	2/3	4
5	4.5	5.5	3/2	5
6	3.5	3.0	1/4	6
7	3.0	4.5	4/1	7
8	2.5	6.5	3/4	8
9	6.5	3.5	4/3	9

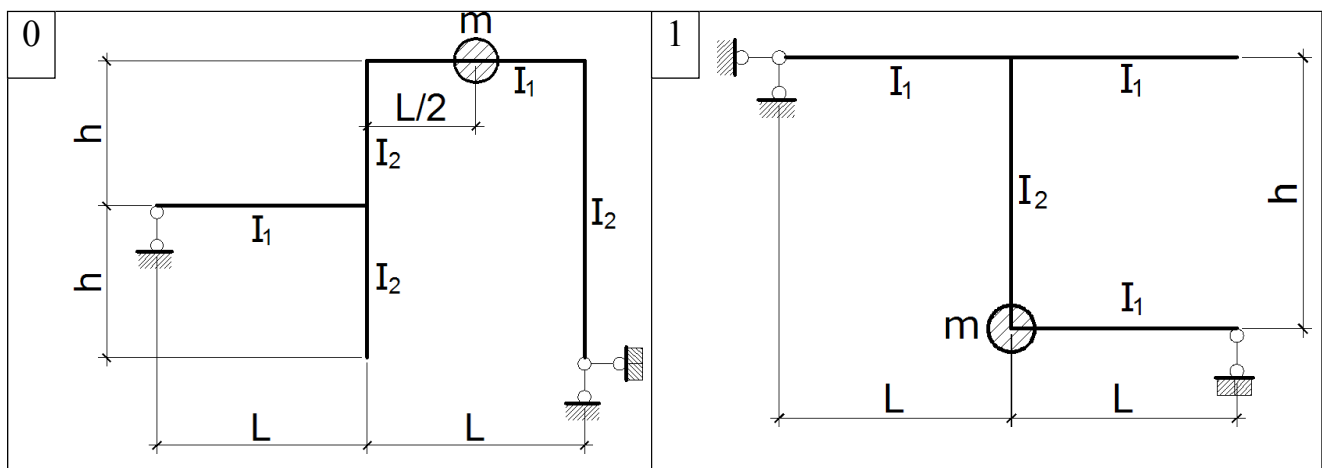


Рис. 23

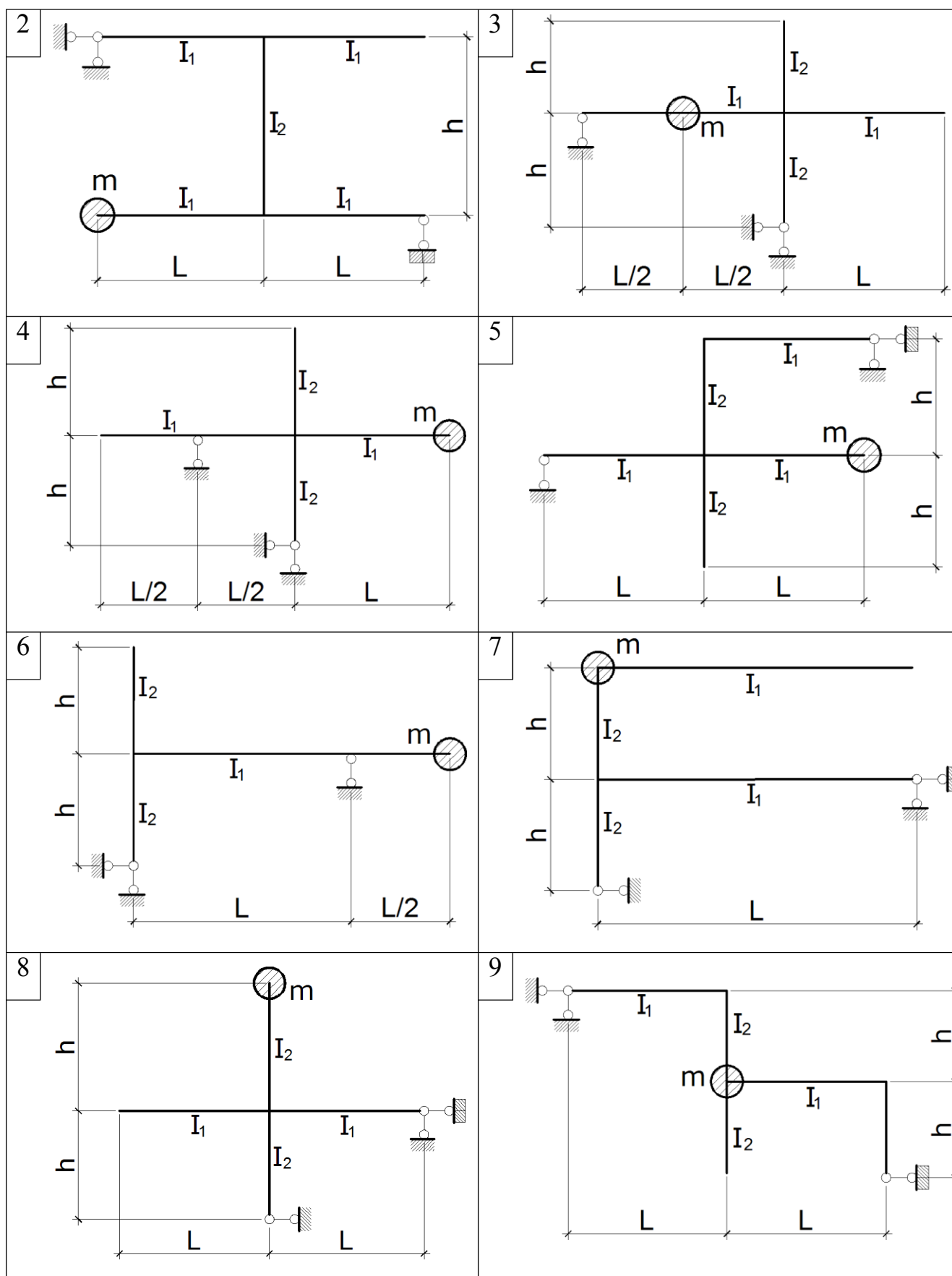


Рис. 24

Пример решения задачи

Задача №4 Динамический расчет плоской

Дано: $L = 6\text{м}$, $h = 4\text{м}$, $I_2 = 2I$, $I_1 = I$ (рис. 25). ^{рамы}

Найти: ω_1 , ω_2 —?

Решение:

1. Определение числа динамических степеней свободы.

$$W_D = 2;$$

2. Формирование векового уравнения.

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}^* m_1 - \lambda & \delta_{12}^* m_2 \\ \delta_{21}^* m_1 & \delta_{22}^* m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$\delta_{11}^* m_1 - \lambda \quad \delta_{22}^* m_2 - \lambda - \delta_{21}^* m_1 \cdot \delta_{12}^* m_2 = 0;$$

$$\lambda^2 - \delta_{11}^* m_1 + \delta_{22}^* m_2 \lambda + \delta_{11}^* m_1 \cdot \delta_{22}^* m_2 - \delta_{21}^* m_1 \cdot \delta_{12}^* m_2 = 0;$$

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0,$$

$$\text{где } b = -\delta_{11}^* m_1 + \delta_{22}^* m_2; \quad c = \delta_{11}^* m_1 \cdot \delta_{22}^* m_2 - \delta_{21}^* m_1 \cdot \delta_{12}^* m_2;$$

3. Решение вспомогательных задач.

3.1. Решение первой вспомогательной задачи (рис. 26).

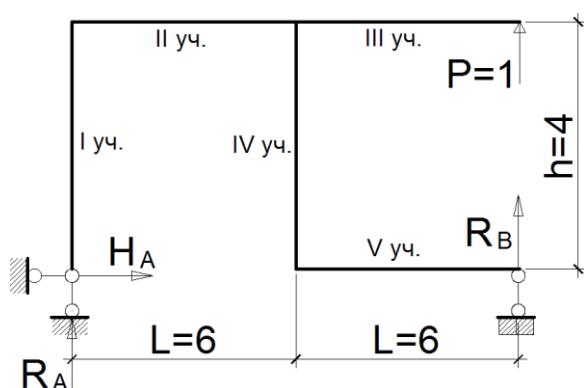


Рис. 26

3.1.1. Определение опорных реакций.

$$m_A = 0: P \cdot 12 + R_B \cdot 12 = 0;$$

$$R_B = -1;$$

$$m_B = 0: -R_A \cdot 12 = 0; \quad R_A = 0;$$

$$X = 0: H_A = 0;$$

3.1.2. Построение эпюры моментов « M^I » (рис. 27).

1-й участок

$$0 \leq x \leq 4$$

$$M_x = -H_A \cdot x;$$

$$M_x = 0 = 0; \quad M_x = 4 = 0;$$

2-й участок

$$0 \leq x \leq 6$$

$$M(x) = -H_A \cdot 4 + R_A \cdot x;$$

$$M(x=0) = 0; M(x=6) = 0;$$

$$0 \leq x \leq 4$$

$$\leq \leq$$

$$M(x) = -R_B \cdot 6;$$

$$M(x=0) = 6; M(x=6) = 6;$$

$$\leq \leq$$

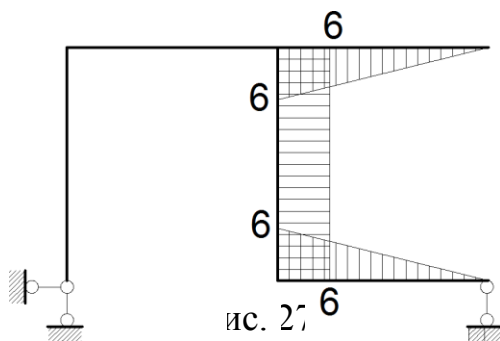
$$M(x) = P \cdot x;$$

$$M(x=0) = 0; M(x=6) = 6;$$

$$\leq \leq$$

$$M(x) = R_B \cdot x;$$

$$M(x=0) = 0; M(x=6) = -6;$$



P

3.2. Решение второй вспомогательной задачи (рис. 28).

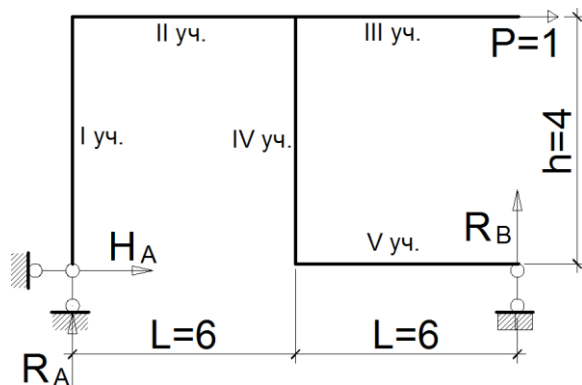


Рис. 28

3.2.1. Определение опорных реакций.

$$m_A = 0: -P \cdot 4 + R_B \cdot 12 = 0;$$

$$R_B = 1/3;$$

$$m_B = 0: -R_A \cdot 12 - P \cdot 4 = 0;$$

$$R_A = -1/3;$$

$$X = 0: H_A + P = 0; H_A = -1;$$

3.2.2. Построение эпюры моментов « M^I » (рис. 29).

1-й участок

$$0 \leq x \leq 4$$

$$M(x) = -H_A \cdot x;$$

$$M(x=0) = 0; M(x=4) = 4;$$

2-й участок

$$0 \leq x \leq 6$$

$$M(x) = -H_A \cdot 4 + R_A \cdot x;$$

$$M(x=0) = 4; M(x=6) = 2;$$

3-й участок

$$0 \leq x \leq 6$$

$$M_x = 0;$$

4-й участок

$$0 \leq x \leq 4$$

$$M_x = -R_B \cdot 6 = -2;$$

5-й участок

$$0 \leq x \leq 6$$

$$M_x = R_B \cdot x;$$

$$M_x = 0 = 0; \quad M_x = 6 = 2;$$

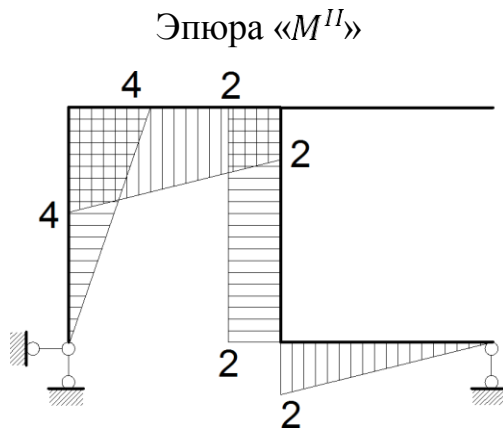


Рис. 29

4. Вычисление коэффициентов векового уравнения.

$$\delta_{11}^* = \sum \frac{M^I M^I dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 6 \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} 6 \cdot 4 \cdot 6 \right] = \frac{216}{EJ};$$

$$\delta_{12}^* = \sum \frac{M^I M^{II} dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 2 + \frac{1}{2EJ} -6 \cdot 4 \cdot 2 \right] = -\frac{48}{EJ};$$

$$\delta_{22}^* = \sum \frac{M^{II} M^{II} dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} 4 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} 4 + \frac{1}{3} 2 \right) + \frac{1}{2} 2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} 2 + \frac{1}{3} 4 \right) + \frac{1}{2} 2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 2 + \frac{1}{2EJ} \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \right] = \frac{82.667}{EJ};$$

5. Решение векового уравнения.

$$m_1 = m; \quad m_1 = m;$$

$$b = -\delta_{11}^* m_1 + \delta_{22}^* m_2 = -\frac{216}{EJ} \cdot m + \frac{82.667}{EJ} \cdot m = -298.667 \cdot \frac{m}{EJ};$$

$$c = \delta_{11}^* m_1 \cdot \delta_{22}^* m_2 - \delta_{21}^* m_1 \cdot \delta_{12}^* m_2 = \frac{216}{EJ} m \cdot \frac{82.667}{EJ} m - \left(-\frac{48}{EJ} m \right) \left(-\frac{48}{EJ} m \right) =$$

$$= 15552.072 \cdot \frac{m^2}{EJ};$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c};$$

$$\lambda_1 = - \frac{-298.667 \cdot \frac{m}{2EJ}}{\sqrt{\frac{-298.667 \cdot \frac{m}{2EJ}}{}^2 - 15552.072 \cdot \frac{m}{EJ}}} =$$

$$= 231.482 \cdot \frac{m}{EJ};$$

$$\lambda_2 = - \frac{-298.667 \cdot \frac{m}{2EJ}}{\sqrt{\frac{-298.667 \cdot \frac{m}{2EJ}}{}^2 - 15552.072 \cdot \frac{m}{EJ}}} =$$

$$= 67.185 \cdot \frac{m}{EJ};$$

6. Определение спектра частот собственных колебаний.

$$\omega_1 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{EI}{231.482m} = 0.0657 \frac{EI}{m};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{EI}{67.185m} = 0.122 \frac{EI}{m};$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев В.А. Строительная механика. М.: Стройиздат, 1976
2. Снытко Н.К. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1980
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенников Б.А., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1984.
4. Киселев В.А. Строительная механика (спец. курс.). М.: Высшая школа, 1973.